

## 15 -Дәріс

**Тақырыбы:** Асимптоталар. Функцияны туынды көмегімен толық зерттеу және графигін құру.

### Функция графигінің асимптоталары

**Анықтама.** Егер  $y = f(x)$  функциясының графигіндегі  $M(x, f(x))$  нүктесі координата бас нүктесінен шексіз алыстағанда осы  $M$  нүктесінен  $y = kx + b$  түзуіне дейінгі қашықтық нөлге ұмтылса,  $y = kx + b$  түзуі  $f(x)$  - тің графигінің **асимптотасы** деп аталады.

Мұнда екі жағдай болуы мүмкін:

- 1)  $M(x, f(x))$  нүктесінің абциссасы  $x$  ақырлы  $a$  санына ұмтылады. Онда  $x = a$ ,  $y > 0$  немесе  $x = a$ ,  $y < 0$  жартылай түзуі **вертикаль асимптота** болады;
- 2)  $M(x, f(x))$  нүктесінің абциссасы  $x \rightarrow +\infty$  немесе  $x \rightarrow -\infty$  ұмтылады. Онда  $y = kx + b$  **көлбеу асимптота** деп аталады.

**Теорема-1 (вертикаль асимптота туралы).**  $x = a$  түзуі вертикаль асимптота болуы үшін

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ немесе } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

шектерінің ең болмағанда біреуі шексіз үлкен болуы қажетті және жеткілікті.

**Ескерту.** Вертикаль асимптотаны анықтайтын  $x = a$  саны функциясының үзіліс (екінші ретті) нүктелерінің ішінде.

Егер  $y = f(x)$  - үзіліссіз функция болса, онда вертикаль асимптота жоқ.

**Теорема-2 (көлбеу асимптота туралы).**  $y = kx + b$  түзуі  $y = f(x)$  функциясының көлбеу асимптотасы болуы үшін

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ және } b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] \quad (1)$$

шектерінің бар болуы қажетті және жеткілікті. (мұнда  $x \rightarrow +\infty$  ұмтылғандағы шек **оң жақ көлбеу асимптота**, ал  $x \rightarrow -\infty$  ұмтылғандағы шек **сол жақ көлбеу асимптота** үшін қарастырылады)

### Функцияны зерттеу схемасы және оның графигін салу

Функцияны зерттеп, оның графигін салу жұмысын келесі ретпен жүргізуді ұсынуға болады.

1. Функцияның анықталу аймағын анықтау. Оны жұп, тақ, периодтылықты зерттеу. Графиктің координата өстерімен қиылысу нүктелерін табу;
2. Функцияны үзіліссіздікке зерттеу.
3. Функцияның асимптоталарын табу.
4. Өсу, кему аралықтарын, экстремумдерді табу.
5. Ойыс, дөңес аралықтарын, иілу нүктелерін табу.
6. Табылған үзіліс нүктелерін, күдікті нүктелерді олардың арасындағы аралықтарды (интервалдарды) көрсетіп кесте (таблица) салу. Әрбір аралықта функцияның сипаты көрсетіледі.

Қажет болған жағдайда (дәлірек график үшін) функцияның аралық мәндерін таба отырып функция графигінің эскизін салу.